

Deel 1: Introductie

Stap 1: Teaser

Differentieren is bepalen hoe snel iets verandert, bijvoorbeeld hoeveel meter hoogte je verliest voor elke meter dat je skiet. Natuurlijk hangt dat van je richting af. Recht het dal in skieën gaat het snelst. Wiskundigen zeggen dan dat je recht tegen de gradient in skiet. Maar hoe vind je die snelste richting? Soms heb je geen keus! De video in de folder *teaser* geeft daarvan een duidelijk voorbeeld...

Stap 2: Wat kun je na deze les

Numeriek integreren door bij een beginwaarde herhaalde malen de snelheid van verandering maal de verstreken tijd op te tellen.

Numeriek differentieren door herhaalde malen te kijken hoeveel een beginwaarde veranderd is en deze verandering te delen door hoe lang die verandering duurde.

Numeriek de “richting” bepalen die de snelste verandering in “hoogte” geeft.

Numeriek bepalen hoe snel de “hoogte” in die richting verandert.

Richting en veranderingssnelheid samen zijn weer te geven door een pijl: de gradient.

Stap 3: Ophalen benodigde voorkennis

Een wiskundige functie is soort fabriekje. Er gaan als grondstoffen getallen in. Afhankelijk van welke getallen er ingaan, worden andere getallen geproduceerd.

Een voorbeeld van zo'n fabriekje is een functie waar een x en een y coördinaat ingaan en die afhankelijk hiervan aan de uitgang een hoogte z oplevert. Zo'n functie definieert in feite een berglandschap.

Deel 2: Kern

Stap 4: Uitleg van de nieuwe lesstof

De slides in deze les geven een samenvatting van de lesstof. De docent legt deze uit.

Integreren en differentieren

Als voorbeeld voor numeriek integreren en differentieren wordt een optrekkende auto gebruikt, waarvan steeds na korte tijd berekend wordt hoe hard hij nu gaat en waar hij dan inmiddels is.

Als een auto een acceleratie a heeft van 2 m/s^2 , dan gaat hij elke seconde 2 m/s harder. Als hij dan bijv. 0.3 s lang versnelt, is de snelheid v toegenomen met $2 \times 0.3 \text{ m/s}$. Als formule:

$$v_{\text{Nieuw}} = v_{\text{Oud}} + a * \text{delta}T$$

Zo weet je na elke berekening weer hoe hard hij op dat moment gaat, de nieuwe snelheid v_{Nieuw} .

Als je v_{Nieuw} weet, kun je ook berekenen waar hij dan is. Stel dat hij nu 4 m/s gaat en hij was op positie x_{Oud} , dan is na 0.3 s de positie x toegenomen met $4 \times 0.3 \text{ m}$. Als formule:

$$x_{\text{Nieuw}} = x_{\text{Oud}} + v_{\text{Nieuw}} * \text{delta}T$$

Zo weet je na elke berekening weer waar hij op dat moment is. De uitkomsten zijn echter onnauwkeurig, omdat je maar af en toe rekent, terwijl de auto ook tussentijds versneld. Hoe korter je $\text{delta}T$ maakt, hoe nauwkeuriger de berekening is. Deze berekening heet numerieke integratie.

Als $\text{delta}T$ steeds dichterbij 0 komt te liggen, komen v_{Nieuw} en x_{Nieuw} steeds dichterbij de echte snelheid v_{Echt} en de echte positie x_{Echt} te liggen. De waarden v_{Echt} en x_{Echt} worden limieten genoemd. Het zijn de juiste waarden, maar omdat $\text{delta}T$ nooit 0 wordt, kom je nooit precies op die limieten uit, deze worden slechts benaderd.

Wil je toch weten wat die limieten v_{Echt} en x_{Echt} nu exact zijn, dan ben je aangewezen op de zogenaamde analytische integraal. Deze is voornamelijk van theoretisch belang en lang niet altijd uit te rekenen. Analytische integratie valt buiten het bestek van deze les.

Omgekeerd kun je uit de toename van x en de verstreken tijd $\text{delta}T$ steeds de snelheid v berekenen. Deze berekening heet numerieke differentiatie en levert weer een benadering.

En als je zo door positie x te differentieren v hebt berekend, kun je daaruit acceleratie a berekenen. Want de toename van v gedeeld door de verstreken tijd $\text{delta}T$ is de acceleratie a . Immers acceleratie is hoeveel de snelheid per seconde toeneemt.

Gradient descent

Als je tegen een heuvel opklimt, wordt de richting (kompaskoers) waarin je het snelste stijgt de richting van de gradient genoemd. De grootte van de gradient is hoeveel meter je dan stijgt per meter horizontale verplaatsing.

Om er achter te komen welke kant je op moet en hoe hard je dan stijgt is het volgende experiment voldoende om dit bij benadering vast te stellen:

1. Loop 1 m in de x richting (bijv. naar het oosten) en noteer hoeveel m je stijgt, noem dit $\text{delta}X$.
2. Loop 1 m in de y richting (bijv. naar het noorden) en noteer hoeveel m je stijgt. Noem dit $\text{delta}Y$.
3. De vector met coördinaten $(\text{delta}X, \text{delta}Y)$ wijst dan in de richting van de snelste stijging. Deze vector heet de gradient, en de lengte ervan geeft aan hoe snel je stijgt als je in die ideale richting klimt.

Bij veel wiskundige problemen is het doel niet zo snel mogelijk te stijgen, maar zo snel mogelijk te dalen. Dit doe je door recht tegen de gradient in te lopen, dus precies de andere kant op. De meeste berglandschappen hebben een onregelmatige vorm dus je moet voortdurend je koers bijstellen om zo steil mogelijk het dal in te blijven lopen. Het aldus steeds bijstellen van je koers wordt de *gradient descent method* (gradient afdalings methode) genoemd. Dit voorbeeld van bergen en dalen is drie-dimensionaal, waarbij maar twee getallen, x en y , vrij kunnen worden gevarieerd.

De gradient descent methode wordt bij neurale netwerken gebruikt om de afwijking tussen gewenste uitkomst en werkelijke uitkomst van het neurale netwerk zo klein mogelijk te maken door de zogenaamde weight factors van het netwerk te variëren. Vaak zijn dat er tientallen of honderden in plaats van alleen maar x en y . Dat maakt echter niet uit, het berglandschap is alleen maar een manier om je bij gradient descent iets ruimtelijks voor te kunnen stellen.

Wiskunde gaat veel verder dan ons ruimtelijke voorstellingsvermogen. Het is een spel waarvan de regels na eeuwen cumulatief denkwerk zo gekozen zijn dat ze een effectief model van de werkelijkheid vormen, ook als ons voorstellingsvermogen te kort schiet. Dat is de kracht van wiskunde. Wat dat betreft staan we met onze techniek op de schouders van reuzen zoals Leibniz, Frege, Gauss en Lagrange, die dit indrukwekkende bouwwerk hebben geconstrueerd. Of hebben ze het ontdekt? Was π er al voor wij er waren?

Stap 5: Voorbeelden en vragen door docent

Functies van meerdere variabelen

Voorbeeld-programma *mountainscape* bevat functie *getZ* die een z waarde uitrekent aan de hand van parameters x en y . Dit programma is tevens het eerste voorbeeld van gebruik van de *NumPy* matrix en vector library en de *Matplotlib* grafische library. Beiden worden veel gebruikt in AI toepassingen. Als introductie in deze libraries legt de docent dit voorbeeld-programma regel voor regel uit. Deze kennis, en wat zelfstandig leeswerk op Google over Matplotlib, heb je nodig om het huiswerk te kunnen maken.

Integreren en differentieren

Welke van de geïntroduceerde begrippen integreren, differentieren en gradient descent herken je in de volgende voorbeelden:

Het zich geleidelijk verplaatsen van zand in een zandloper.

Het opladen en ontladen van een batterij.

Het meten van de snelheid van waarmee de zeespiegel stijgt.

Het voorspellen van het klimaat, met name de gemiddelde temperatuur, in 2100.

De loop van een rivier, van boven af gezien.

De wereldwijde windrichtingen ten gevolge van lokale hoge en lage drukgebieden.

De richting waarin vruchtbare grond van een berg afspoelt nadat Mao alle bossen heeft gekapt voor de grote sprong voorwaarts in de landbouw.

Stap 6: Oefenen met de nieuwe lesstof

Een badkraan is gesloten op tijdstip 0. Er zit dan 10 liter water in het bad. Hij wordt geleidelijk

aan open gedraaid, per seconde gaat het water 0.1 liter per seconde harder stromen. Teken in twee recht onder elkaar staande grafieken de stroomsnelheid van de kraan en de hoeveelheid water in het bad voor de eerste 20 seconden. De seconden staan langs de x (horizontale) as. Hoe heet de berekening die je hebt uitgevoerd om de grafieken te kunnen tekenen?

Stap 7: Feedback op gemaakte oefening

Eén of meerdere cursisten geven feedback op het verloop van de oefening: Waar liep men tegenaan, hoe werd dit opgelost, zijn er nog resterende onduidelijkheden,

Deel 3: Afronding

Stap 8: Evalueren of deze les goed “geland” is

Eén of meer leden van elke groep stellen vragen en/of geven tips en/of tops.

Stap 9: Huiswerk om je de lesstof verder eigen te maken

Zie *huiswerk_opgaven.pdf*.

--//--