Getallen

Als ‘t heelal er
niet zou zijn,
was ‘t getal 3 er
dan ook niet?

Natuurkunde

3

Wiskunde

Wiskunde is de manipulatie
van betekenisloze symbolen
volgens vaste regels

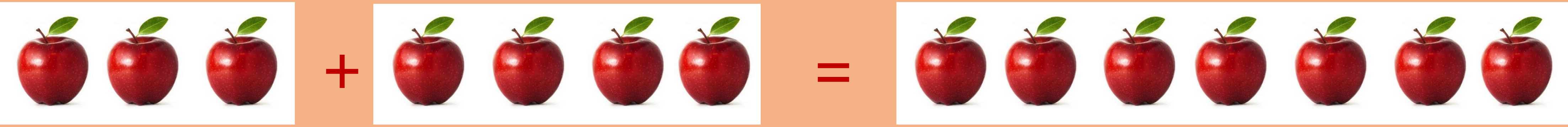
Wij bepalen de regels: 1 + 1 = 3

Basis-bewerkingen: + en ×

term → 3 + 4 ← term = 7 ← som

Basis-bewerkingen: + en ×

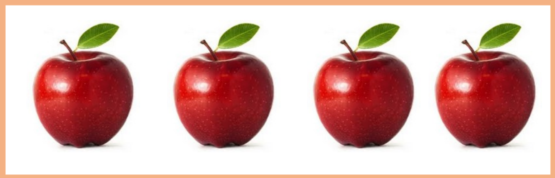
term → 3 + 4 ← term = 7 ← som



1 2 3 1 2 3 4 1 2 3 4 5 6 7

Basis-bewerkingen: + en ×

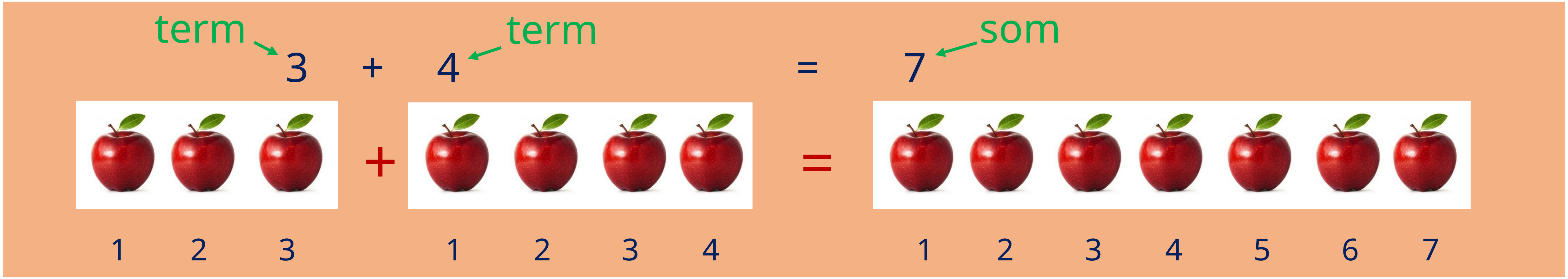
term → 3 + 4 ← term = 7 ← som

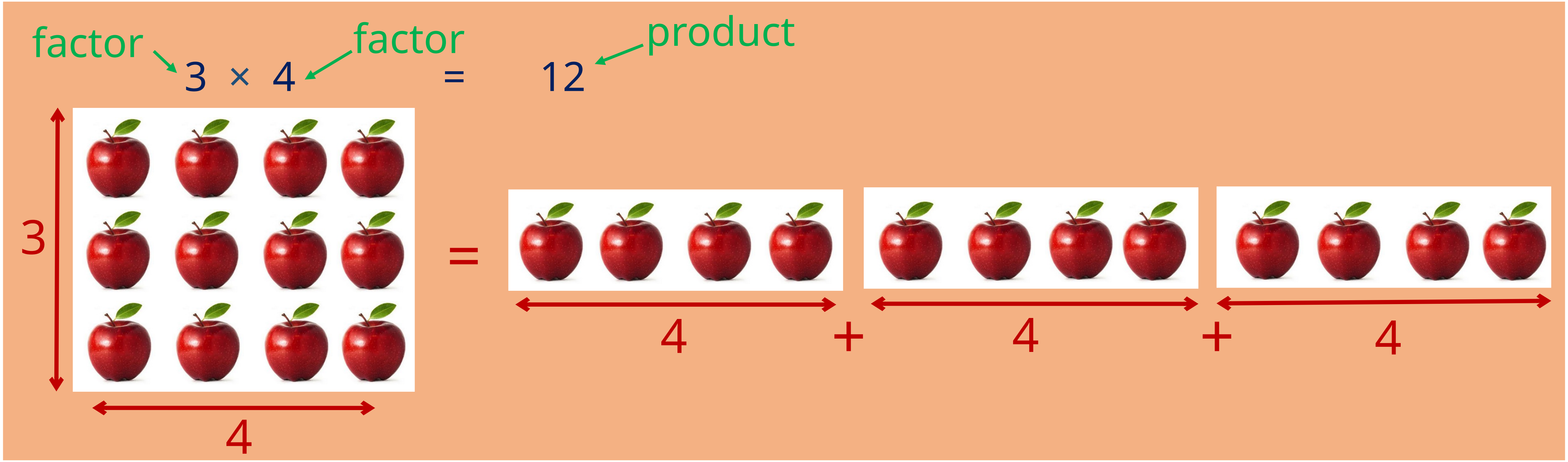

+

=


1 2 3   1 2 3 4   1 2 3 4 5 6 7

factor → 3 × 4 ← factor = 12 ← product

Basis-bewerkingen: + en ×



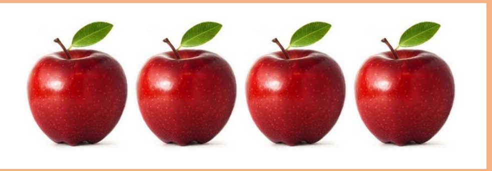


Spelregel 1: Commutatieve eigenschap

$$3 + 4 = 4 + 3$$

Spelregel 1: Commutatieve eigenschap

3 + 4 = 4 + 3

 +  =  + 

Spelregel 1: Commutatieve eigenschap

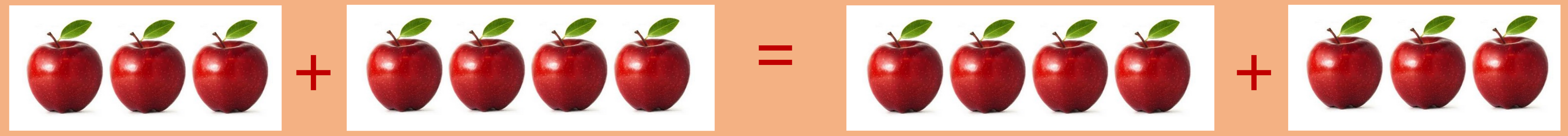
3 + 4 = 4 + 3

 +  =  + 

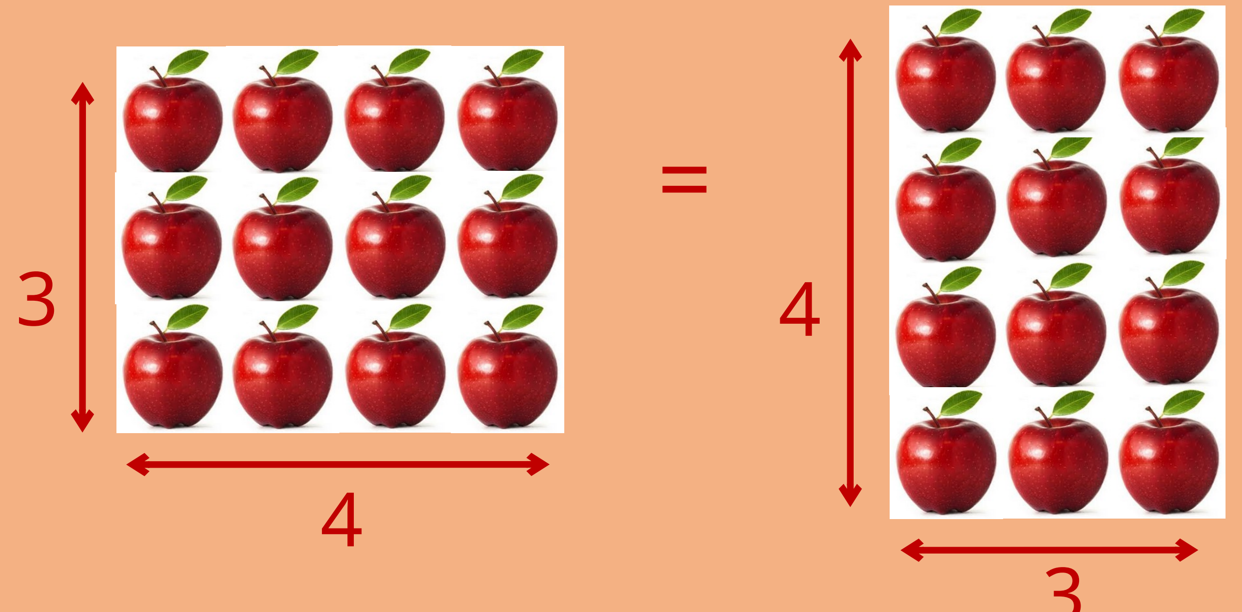
3 x 4 = 4 × 3

Spelregel 1: Commutatieve eigenschap

3 + 4 = 4 + 3



3 x 4 = 4 × 3

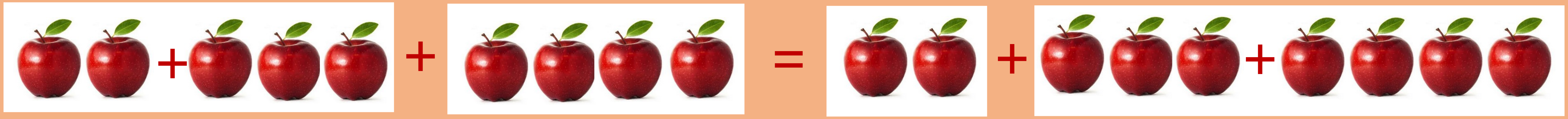


Spelregel 2: Associatieve eigenschap

$$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$$

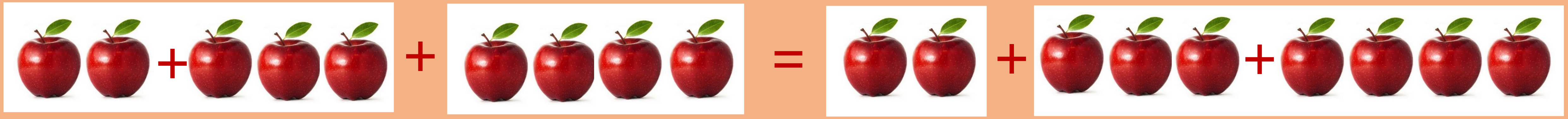
Spelregel 2: Associatieve eigenschap

(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)



Spelregel 2: Associatieve eigenschap

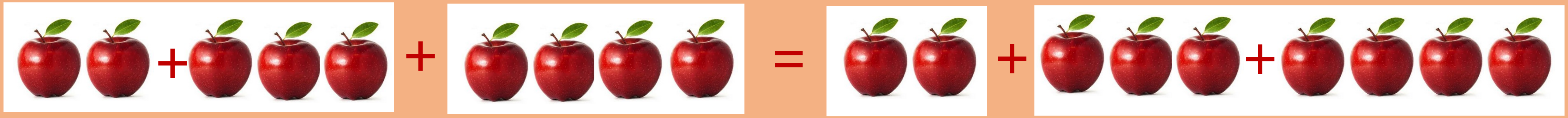
$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$



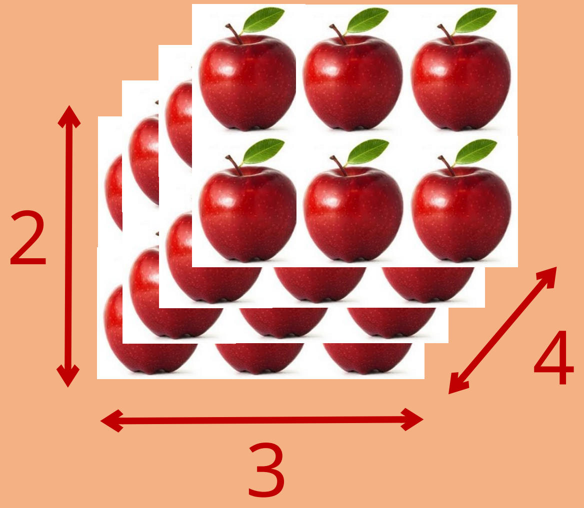
$(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$

Spelregel 2: Associatieve eigenschap

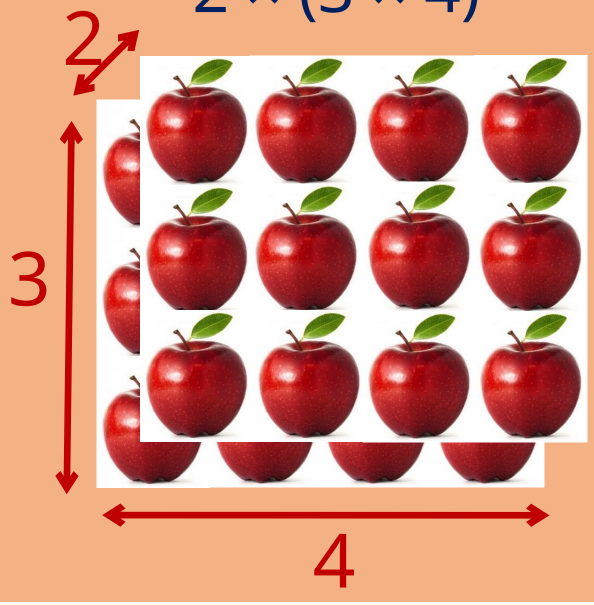
(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)



(2 × 3) × 4 = 2 × (3 × 4)



=

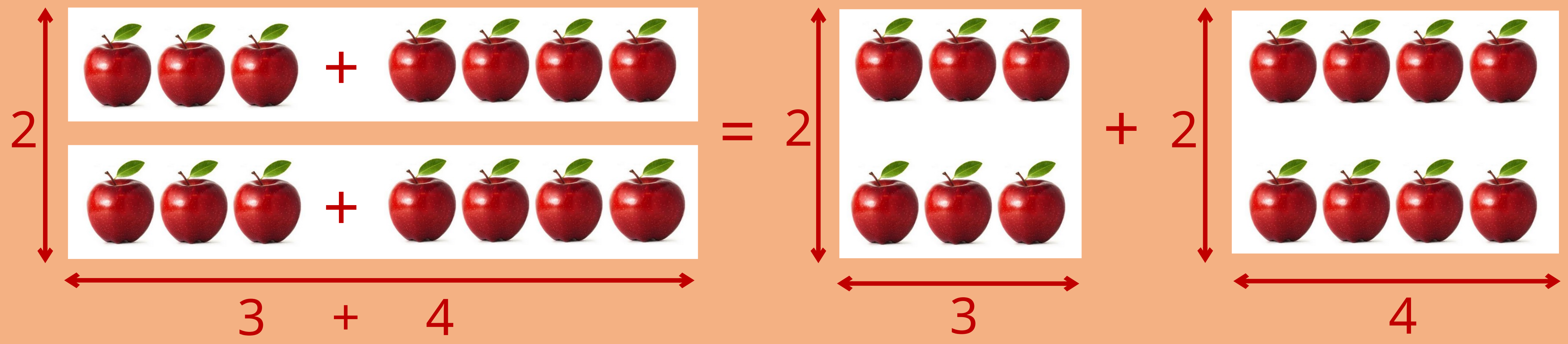


Spelregel 3: Distributieve eigenschap

$2 \times (3 + 4) = 2 \times 3 + 2 \times 4$

Spelregel 3: Distributieve eigenschap

$$2 \times (3 + 4) = 2 \times 3 + 2 \times 4$$



Variabelen zijn letters die onbekende getallen voorstellen

Variabelen zijn letters die onbekende getallen voorstellen

Spelregels met getallen

1. Commutatief:	$3 + 4 = 4 + 3$	en	$3 \times 4 = 4 \times 3$
2. Associatief:	$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$	en	$(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$
3. Distributief:	$2 \times (3 + 4) = 2 \times 3 + 2 \times 4$		

Variabelen zijn letters die onbekende getallen voorstellen

Spelregels met getallen

1. Commutatief:	$3 + 4 = 4 + 3$	en	$3 \times 4 = 4 \times 3$
2. Associatief:	$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$	en	$(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$
3. Distributief:	$2 \times (3 + 4) = 2 \times 3 + 2 \times 4$		

Met variabelen

1.	$a + b = b + a$	en	$a \times b = b \times a$
2.	$(a + b) + c = a + (b + c)$	en	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
3.	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$		

Variabelen zijn letters die onbekende getallen voorstellen

Spelregels met getallen			
1. Commutatief:	$3 + 4 = 4 + 3$	en	$3 \times 4 = 4 \times 3$
2. Associatief:	$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$	en	$(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$
3. Distributief:	$2 \times (3 + 4) = 2 \times 3 + 2 \times 4$		

Met variabelen			
1.	$a + b = b + a$	en	$a \times b = b \times a$
2.	$(a + b) + c = a + (b + c)$	en	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
3.	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$		

Maal-teken weglaten			
1.	$a + b = b + a$	en	$a\ b = b\ a$
2.	$(a + b) + c = a + (b + c)$	en	$(a\ b)\ c = a\ (b\ c)$
3.	$a\ (b + c) = a\ b + a\ c$		

Afleiding van aanvullende spelregel

Afleiding van aanvullende spelregel

$$\left.\begin{aligned} a\,(b+c) &= a\,b + a\,c \\ a\,b &= b\,a \end{aligned}\right\} \Rightarrow (b+c)\,a = b\,a + c\,a$$

Afleiding van aanvullende spelregel

$$\left.\begin{array}{l} a\,(b + c) = a\,b + a\,c \\ a\,b = b\,a \end{array}\right\} \Rightarrow (b + c)\,a = b\,a + c\,a$$

Dus, met andere letters:

$$(a + b)\,c = a\,c + b\,c$$

Neutrale elementen

Neutrale elementen

Neutrale element van de optelling, symbool: **0**

Hiervoor geldt:

$a + 0 = a$

Neutrale elementen

Neutrale element van de optelling, symbool: **0**

Hiervoor geldt:

$a + 0 = a$

Dus ook:

$$\left.\begin{array}{l} a + 0 = a \\ a + b = b + a \end{array}\right\} \Rightarrow 0 + a = a$$

Neutrale elementen

Neutrale element van de optelling, symbool: **0**

Hiervoor geldt:

$$a + 0 = a$$

Dus ook:

$$\left.\begin{array}{l} a + 0 = a \\ a + b = b + a \end{array}\right\} \Rightarrow 0 + a = a$$

Neutrale element van de vermenigvuldiging, symbool: **1**

Hiervoor geldt:

$$a \times 1 = a$$

Neutrale elementen

Neutrale element van de optelling, symbool: **0**

Hiervoor geldt:

$$a + 0 = a$$

Dus ook:

$$\left.\begin{array}{l} a + 0 = a \\ a + b = b + a \end{array}\right\} \Rightarrow 0 + a = a$$

Neutrale element van de vermenigvuldiging, symbool: **1**

Hiervoor geldt:

$$a \times 1 = a$$

Dus ook:

$$\left.\begin{array}{l} a \times 1 = a \\ a \times b = b \times a \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \times a = a$$

Inversen

Inversen

Inversen

Inversen

Additieve inverse van a, symbol: **-a** of **-1 × a**

Hiervoor geldt:

$a + -a = 0$

Inversen

Additieve inverse van a, symbol: **-a** of **-1 × a**

Hiervoor geldt:

$$a + -a = 0$$

Dus ook:

$$\left.\begin{aligned} a + -a &= 0 \\ a + b &= b + a \end{aligned}\right\} \Rightarrow -a + a = 0$$

Inversen

Additieve inverse van a, symbol: **-a** of **-1 × a**

Hiervoor geldt:

$$a + -a = 0$$

Dus ook:

$$\left.\begin{array}{l} a + -a = 0 \\ a + b = b + a \end{array}\right\} \Rightarrow -a + a = 0$$

Multiplicatieve inverse van a, symbol: $\mathbf{\frac{1}{a}}$ of $\mathbf{a^{-1}}$

Hiervoor geldt:

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$

Inversen

Additieve inverse van a, symbol: **-a** of **-1 × a**

Hiervoor geldt:

$$a + -a = 0$$

Dus ook:

$$\left.\begin{array}{l} a + -a = 0 \\ a + b = b + a \end{array}\right\} \Rightarrow -a + a = 0$$

Multiplicatieve inverse van a, symbol: $\mathbf{\frac{1}{a}}$ of $\mathbf{a^{-1}}$

Hiervoor geldt:

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$

Dus ook:

$$\left.\begin{array}{l} a \times \frac{1}{a} = 1 \\ a \times b = b \times a \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{a} \times a = 1$$

Afspraak: $-1 \times -1 = 1$

Afspraak: $-1 \times -1 = 1$

Gevolgen:

Afspraak: $-1 \times -1 = 1$

Gevolgen:

$-a \times -b = (-1 \times a) \times (-1 \times b) = -1 \times -1 \times a \times b = 1 \times ab = ab$

Afspraak: $-1 \times -1 = 1$

Gevolgen:

$-a \times -b = (-1 \times a) \times (-1 \times b) = -1 \times -1 \times a \times b = 1 \times ab = ab$

$-a \times b = (-1 \times a) \times b = -1 \times (a \times b) = -ab$

Afspraak: $-1 \times -1 = 1$

Gevolgen:

$-a \times -b = (-1 \times a) \times (-1 \times b) = -1 \times -1 \times a \times b = 1 \times ab = ab$

$-a \times b = (-1 \times a) \times b = -1 \times (a \times b) = -ab$

$a \times -b = a \times (-1 \times b) = -1 \times (a \times b) = -ab$

Afgeleide bewerkingen: - en :

Afgeleide bewerkingen: - en :

$a - b \triangleq a + -b$

$a - b = c$

Afgeleide bewerkingen: - en :

$$a - b \triangleq a + -b$$

term term verschil van a en b

$$a - b = c$$

Afgeleide bewerkingen: - en :

$a - b \triangleq a + -b$

term term verschil van a en b

$a \; \boxed{- \; b} = c$

$a : b = a \,/\, b = \frac{a}{b} \triangleq a \times \frac{1}{b} = a\,b^{-1}$

$a : b = c$

Afgeleide bewerkingen: - en :

$a - b \triangleq a + -b$

term, term, verschil van a en b

$a \; \boxed{- \; b} = c$

$a : b = a / b = \frac{a}{b} \triangleq a \times \frac{1}{b} = a\,b^{-1}$

deeltal, deler, quotiënt

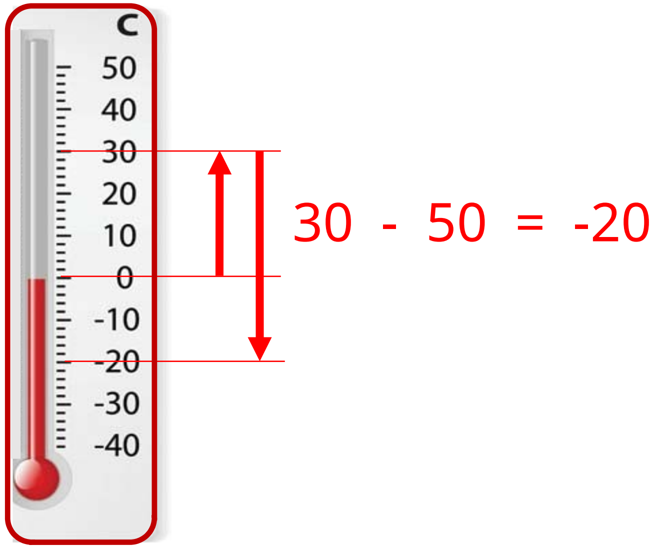
$a : b = c$

Afgeleide bewerkingen: - en :

$a - b \triangleq a + -b$

term term verschil van a en b

$a - b = c$



$a : b = a / b = \frac{a}{b} \triangleq a \times \frac{1}{b} = a\, b^{-1}$

deeltal deler quotiënt

$a : b = c$

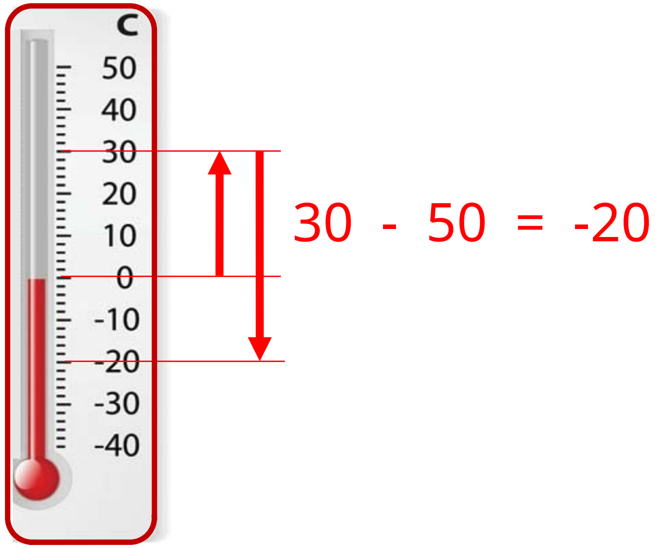
Afgeleide bewerkingen: - en :

$a - b \triangleq a + -b$

term term

verschil van a en b

$a \; \boxed{- \; b} = c$



$a : b = a / b = \frac{a}{b} \triangleq a \times \frac{1}{b} = a\,b^{-1}$

deeltal deler

quotiënt

$a : b = c$

Afgeleide bewerkingen: - en :

$a - b \triangleq a + -b$

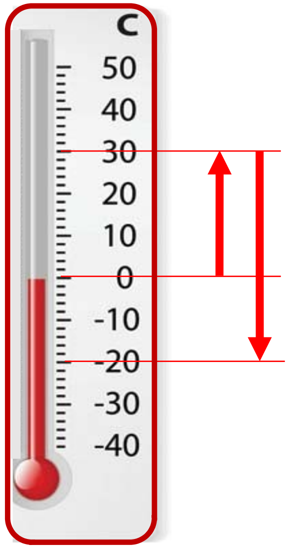
term term verschil van a en b

$a - b = c$

$a : b = a \,/\, b = \frac{a}{b} \triangleq a \times \frac{1}{b} = a\, b^{-1}$

deeltal deler quotiënt

$a : b = c$



30 - 50 = -20

Afgeleide bewerkingen: - en :

$a - b \triangleq a + -b$

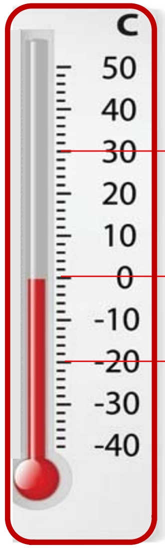
term term verschil van a en b

$a \; \boxed{- \; b} = c$

$a : b = a / b = \frac{a}{b} \triangleq a \times \frac{1}{b} = a\,b^{-1}$

deeltal deler quotiënt

$a : b = c$



$30 - 50 = -20$

$2 : 20 = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

Beperkingen van - en :

Beperkingen van - en :

Aftrekken is niet associatief:
(3 - 2) - 1 = 1 - 1 = **0**
3 - (2 - 1) = 3 - 1 = **2**

Optellen wel:
(3 + -2) + -1 = 1 + -1 = **0**
3 + (-2 + -1) = 3 + -3 = **0**

Beperkingen van - en :

Aftrekken is niet associatief:
(3 - 2) - 1 = 1 - 1 = **0**
3 - (2 - 1) = 3 - 1 = **2**

Optellen wel:
(3 + -2) + -1 = 1 + -1 = **0**
3 + (-2 + -1) = 3 + -3 = **0**

Aftrekken is niet commutatief:
3 - 2 = **1**
2 - 3 = **-1**

Optellen wel:
3 + -2 = **1**
-2 + 3 = **1**

Beperkingen van - en :

Aftrekken is niet associatief:
(3 - 2) - 1 = 1 - 1 = **0**
3 - (2 - 1) = 3 - 1 = **2**

Optellen wel:
(3 + -2) + -1 = 1 + -1 = **0**
3 + (-2 + -1) = 3 + -3 = **0**

Aftrekken is niet commutatief:
3 - 2 = **1**
2 - 3 = **-1**

Optellen wel:
3 + -2 = **1**
-2 + 3 = **1**

Delen is niet associatief:
(8 : 4) : 2 = 2 : 2 = **1**
8 : (4 : 2) = 8 : 2 = **4**

Vermenigvuldigen wel:
(8 × ¼) × ½ = 2 × ½ = **1**
(8 × (¼ × ½) = 8 × 1/8 = **1**

Beperkingen van - en :

Aftrekken is niet associatief:
(3 - 2) - 1 = 1 - 1 = **0**
3 - (2 - 1) = 3 - 1 = **2**

Optellen wel:
(3 + -2) + -1 = 1 + -1 = **0**
3 + (-2 + -1) = 3 + -3 = **0**

Aftrekken is niet commutatief:
3 - 2 = **1**
2 - 3 = **-1**

Optellen wel:
3 + -2 = **1**
-2 + 3 = **1**

Delen is niet associatief:
(8 : 4) : 2 = 2 : 2 = **1**
8 : (4 : 2) = 8 : 2 = **4**

Vermenigvuldigen wel:
(8 × ¼) × ½ = 2 × ½ = **1**
(8 × (¼ × ½) = 8 × 1/8 = **1**

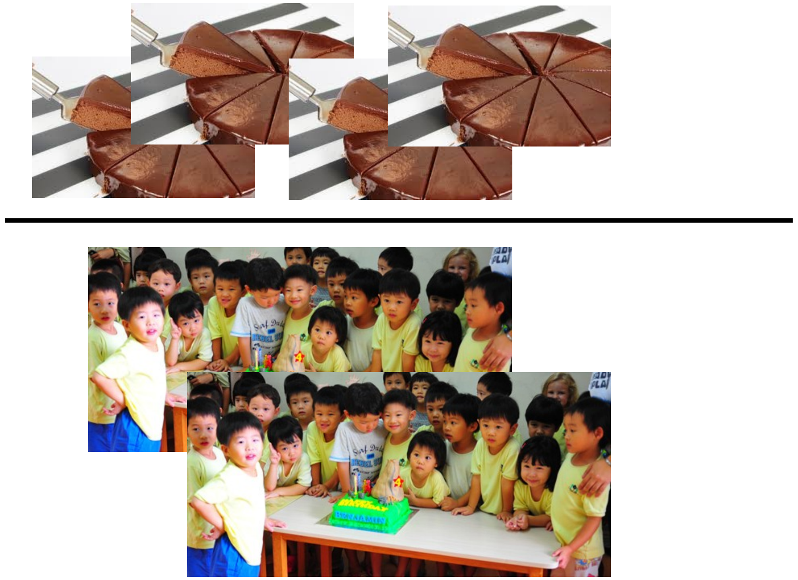
Delen is niet commutatief:
8 : 4 = **2**
4 : 8 = **½**

Vermenigvuldigen wel:
8 × ¼ = **2**
¼ × 8 = **2**

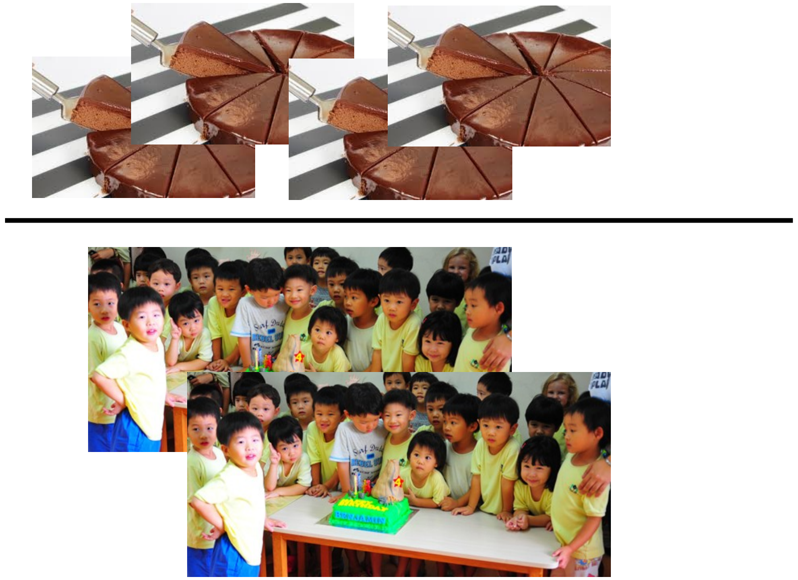
Regels voor het delen

Regels voor het delen

Regels voor het delen

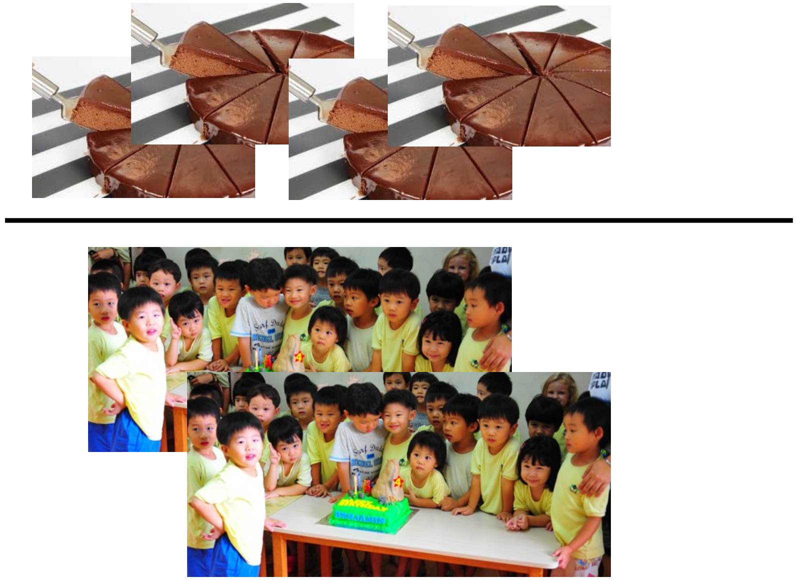


Regels voor het delen

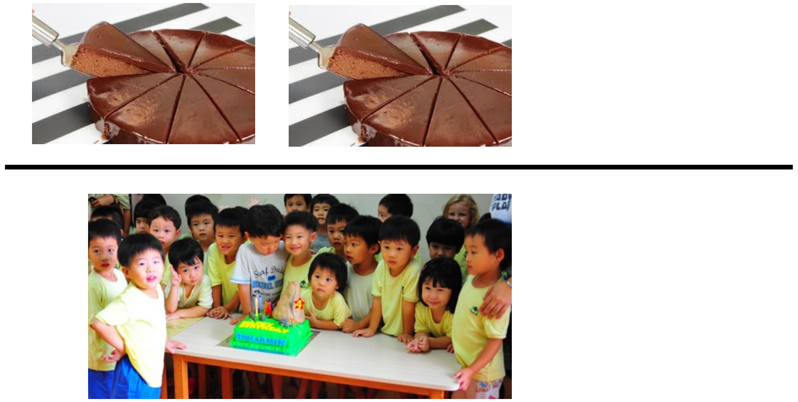


$$\frac{2 \times \mathbf{2}}{20 \times \mathbf{2}} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = \frac{2}{20}$$

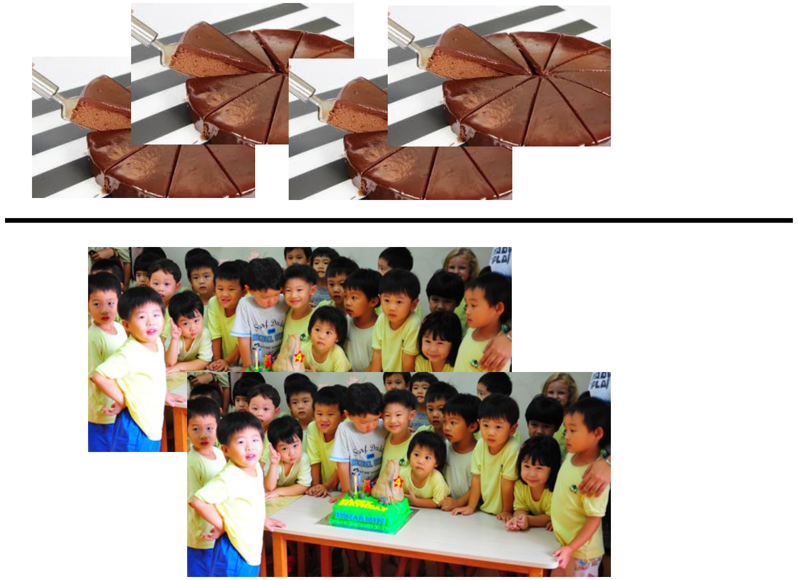
Regels voor het delen



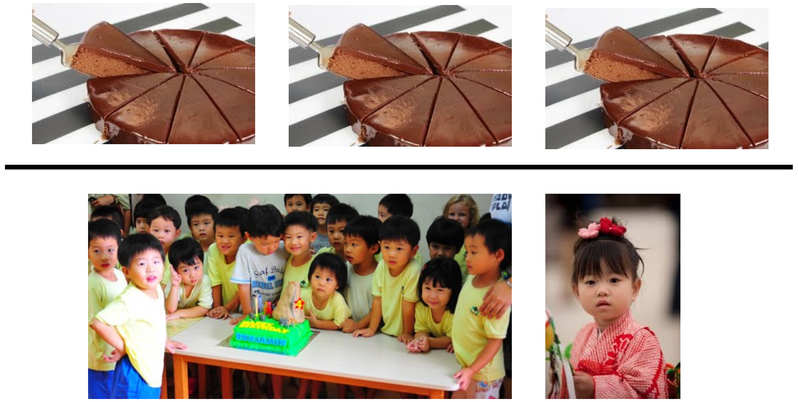
$$\frac{2 \times \mathbf{2}}{20 \times \mathbf{2}} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = \frac{2}{20}$$



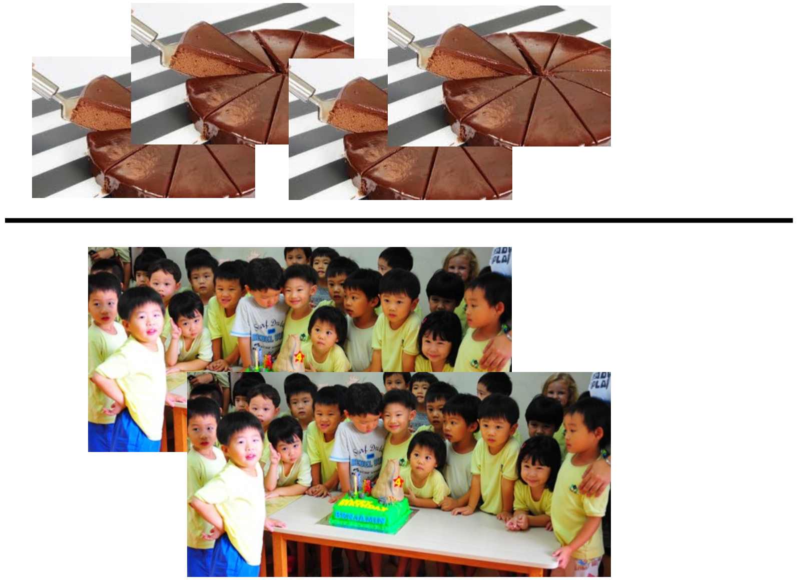
Regels voor het delen



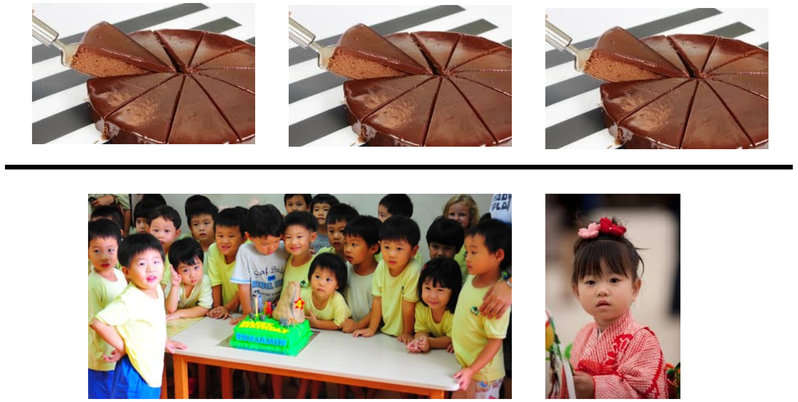
$$\frac{2 \times \mathbf{2}}{20 \times \mathbf{2}} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = \frac{2}{20}$$



Regels voor het delen



$$\frac{2 \times 2}{20 \times 2} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = \frac{2}{20}$$



$$\frac{2 + 1}{20 + 1} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7} \neq \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

Rekenen met breuken

Rekenen met breuken

$$\frac{a}{b}\ \frac{c}{d} = a\ \frac{1}{b}\ c\ \frac{1}{d} = a\ c\ (\frac{1}{b}\ \frac{1}{d}) = a\ c\ ((1 : b) : d) = a\ c\ 1 : (b\ d) = \frac{a\ c}{b\ d}$$

Rekenen met breuken

$$\frac{a}{b}\ \frac{c}{d} = a\ \frac{1}{b}\ c\ \frac{1}{d} = a\ c\left(\frac{1}{b}\ \frac{1}{d}\right) = a\ c\ ((1 : b) : d) = a\ c\ 1 : (b\ d) = \frac{a\ c}{b\ d}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\ \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\ \frac{d}{d\ \frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\ \frac{d}{d\ c\ \frac{1}{d}} = \frac{a}{b}\ \frac{d}{d\ \frac{1}{d}\ c} = \frac{a}{b}\ \frac{d}{c} = \frac{a\ d}{b\ c}$$

Rekenen met breuken

$$\frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = a\,\frac{1}{b}\,c\,\frac{1}{d} = a\,c\left(\frac{1}{b}\,\frac{1}{d}\right) = a\,c\,((1:b):d) = a\,c\,1:(b\,d) = \frac{a\,c}{b\,d}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\,\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\,\frac{d}{d\,\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\,\frac{d}{d\,c\,\frac{1}{d}} = \frac{a}{b}\,\frac{d}{d\,\frac{1}{d}\,c} = \frac{a}{b}\,\frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\,\frac{d}{d} + \frac{b}{b}\,\frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,d} + \frac{b\,c}{b\,d} = a\,d\,\frac{1}{b\,d} + b\,c\,\frac{1}{b\,d} = (a\,d + b\,c)\,\frac{1}{b\,d} = \frac{a\,d + b\,c}{b\,d}$$